Le Lissage Exponentiel

Le cours suivant sur le **Lissage Exponentiel** qui suit est issu du support de la formation « **La prévision des Ventes** » que propose PREDICONSULT.

Il utilise des ressources utilisées dans le logiciel de prévision « Forecast Pro » que commercialise PREDICONSULT.

Le lissage exponentiel représente la méthodologie endogène la plus utilisée d'étude des séries économiques. En l'absence de faits contradictoires à son application, c'est vraisemblablement le meilleur choix de l'utilisateur standard. Dans Forecast Pro XE, les actions spéciales et les prévisions multi-niveaux sont traitées dans le cadre du lissage exponentiel.

Bien que le lissage exponentiel ait été développé il y a plus de 30 ans, c'est toujours un sujet de très grand intérêt dans le cercle des spécialistes. En tous cas, sa réputation de méthode robuste, facile à comprendre, a progressé ces dernières années, souvent aux dépens de Box-Jenkins.

La raison essentielle vient du fait que les modèles de Box-Jenkins sont construits sur le concept abstrait d'auto corrélation, alors que les modèles de lissage exponentiel reposent sur des concepts concrets tel que le niveau, la tendance, la saisonnalité. Par ailleurs, les modèles de lissage exponentiel sont moins perturbés par les points aberrants dans les données observées.

Harvey (1984, 1990) a étendu l'approche du lissage exponentiel quand il a développé les modèles structuraux. Les prévisions dans un modèle structural sont générées par un filtre de Kalman construit sur un modèle statistique formel mettant en jeu les mêmes éléments que le lissage exponentiel : niveau, tendance, saisonnalité. On reconnaît maintenant le lissage exponentiel pour ce qu'il est en fait : des filtres de Kalman approchés ajustés directement sur les données.

Ceci nous donne un cadre général pour étendre la méthodologie de base du lissage exponentiel. Nous en verrons deux extensions dans les modèles suivants :

Les modèles à *erreur proportionnelle* étendent le lissage exponentiel au cas où les erreurs tendent à devenir proportionnelles au niveau des données. La majorité des données économiques semblent présenter cette caractéristique.

Les modèles d'*actions spéciales* étendent le lissage exponentiel pour inclure une estimation, et une quantification, des promotions et autres événements non-périodiques. Les modèles d'actions spéciales ne sont disponibles que dans Forecast Pro XE et dans Forecast Pro Batch.

Approche globale des concepts du lissage exponentiel

Le lissage exponentiel est basé sur un modèle structurel des séries chronologiques. On fait l'hypothèse que le processus étudié comporte l'un ou plusieurs, des composants structurels suivants.

Niveau. Le niveau d'une série chronologique est une valeur lissée, à évolution lente, non saisonnière à la base des observations. IL n'est pas possible de mesurer directement le niveau car il est altéré par la saisonnalité, les promotions et les aléas (bruit). Il doit être estimé à partir des données.

Tendance locale. La tendance locale est le taux de variation lissé des changements du niveau. On l'appelle local pour mettre en évidence le fait qu'à chaque instant il subit des modifications petites et imprévisibles. Les prévisions sont basées sur la tendance locale à l'extrémité de l'historique et non sur la tendance globale de la série. On ne peut pas mesurer directement la tendance. Elle doit être estimée à partir des données.

Effets saisonniers. Les coefficients saisonniers, multiplicatifs ou additifs représentent la structure saisonnière des données, comme par exemple, la structure annuelle du commerce de détail. Comme le niveau et la tendance, les coefficients saisonniers doivent être estimés à partir des données. On suppose qu'ils subissent des changements faibles à chaque instant.

Actions spéciales. Les promotions influencent les ventes d'une façon analogue à la saisonnalité mais elles ne sont pas, en général, périodiques. Les actions multiplicatives ou additives sont estimées à partir des données d'une façon très semblable à l'estimation des coefficients saisonniers. On suppose qu'elles suivent des variations faibles dans le temps. On ne peut prendre en compte les actions spéciales qu'avec Forecast Pro XE.

Effets aléatoires. Le niveau, la tendance, les coefficients saisonniers et d'actions spéciales sont des variables aléatoires : leur valeur change de façon non prévisible au cours du temps. Ces changements sont le résultat de causes inconnues comme celles qui font que le profit, ou la perte, d'une société diffère de ce qui était attendu. Ils sont souvent appelés des chocs aléatoires (*random shocks*).

Bruit. Tout ce que nous venons de décrire sont les composantes d'un processus stochastique. Nos mesures du processus sont toutefois entachées par le bruit ou les erreurs de mesure. Par exemple, les expéditions de chewing-gum ou les commandes de chewing-gum sont des mesures bruitées de la consommation de chewing-gum.

Trois de ces caractéristiques : niveau, effets aléatoires et bruit sont présents dans chaque modèle de lissage exponentiel. Les trois autres : tendance locale, coefficients saisonniers et actions spéciales, peuvent être présents ou absents. L'identification à un modèle consiste à déterminer lesquelles de ces caractéristiques doivent être incluses dans le modèle pour décrire correctement les données.

A l'origine les modèles de lissage exponentiel étaient construits sur ces caractéristiques, sans attention particulière pour le modèle statistique sous-jacent. Les équations de lissage exponentiel constituaient des moyens cohérents pour estimer les caractéristiques des séries chronologiques et effectuer des prévisions. Il n'y avait pas de moyen d'estimer correctement un intervalle de confiance, car il dépend du modèle statistique sous-jacent.

Certains développeurs de logiciel de prévision répondaient au besoin d'intervalle de confiance avec des justifications théoriques faibles ou inexistantes. Alors que pour ces méthodes l'estimation ponctuelle de la prévision était correcte, les limites de confiance étaient inutilisables.

Forecast Pro prend une approche très moderne du lissage exponentiel. Chaque type de modèle de lissage est basé sur un modèle statistique formel qui sert de base pour le calcul des limites de confiance. Les équations de lissage utilisées sont basées sur des filtres de Kalman comme modèle formel. Bien évidemment, tout ceci n'apparaît pas dans l'utilisation et vous n'avez pas à connaître les détails.

Les modèles de la famille du lissage exponentiel

Nous allons donné ici une vue globale - sans équations - des modèles qui constituent la famille du lissage exponentiel.

Chaque modèle de lissage exponentiel met en jeu au moins les trois composants suivants.

Niveau

Effets aléatoires

Bruit

Le lissage exponentiel simple ne comporte que ces trois composantes. On suppose que les données consistent en un niveau, changeant doucement et de façon erratique sous l'influence des effets aléatoires et altérées par le bruit. Le lissage exponentiel simple ne peut pas prendre en compte les effets d'une saisonnalité ou d'une tendance.

Les trois composants restants

Tendance

Coefficients saisonniers

Coefficients d'actions spéciales

sont optionnels. Elles permettent de modéliser des caractéristiques susceptibles d'être présentes dans les données.

La *tendance* peut intervenir de trois façons : aucune, linéaire ou amortie.

Les prévisions d'un modèle *sans* tendance sont horizontales, mis à part l'influence des saisonnalités ou des actions spéciales.

Les prévisions d'un modèle à tendance *linéaire* extrapole la tendance finale de la série sans limite. Les prévisions peuvent devenir infimes (positivement ou négativement).

Les prévisions issues d'un modèle à tendance *amortie* démarrent de façon presque linéaire puis s'amortissent de façon exponentielle jusqu'à atteindre un niveau constant. Cela peut s'avérer approprié pour les données influencées par des cycles économiques. Les modèles à tendance amortie produisent des prévisions finies.

Le modèle de Holt comporte une tendance linéaire mais ne prend en compte ni saisonnalité, ni actions spéciales. Le niveau des données varie constamment à cause de la tendance. Il est également influencé par les effets aléatoires. La tendance varie de façon aléatoire d'un point à un autre car elle aussi est influencée par les effets aléatoires. Les observations sont altérées par le bruit.

Les *coefficients saisonniers* peuvent également intervenir de trois façons : aucun, additifs ou multiplicatifs.

> Si les coefficients sont multiplicatifs, l'ajustement saisonnier est réalisé en multipliant la série désaisonnalisée par les coefficients saisonniers. De la sorte l'effet est proportionnel au niveau de la série. Par exemple, les ventes de décembre sont augmentées de 20% si le coefficient saisonnier est de 1.2. C'est la forme la plus commune de saisonnalité, mais elle ne s'applique qu'à des données positives.
>
> Si les coefficients sont additifs, l'ajustement saisonnier est réalisé en ajoutant le coefficient à la série désaisonnalisée. De la sorte l'effet est indépendant du niveau de la série chronologique. Les ventes de décembre sont augmentées de 1000, si le coefficient saisonnier est de 1000.

Le modèle de lissage exponentiel de Winters multiplicatif (ou additif) extrait les coefficients de niveau, de tendance et de saisonnalité multiplicatif (ou additif). Le modèle non-saisonnier sous-jacent est le même que celui de Holt.

Les coefficients d'actions spéciales peuvent également intervenir de trois façons : aucune, additive ou multiplicative. Les ajustements sont parfaitement semblables à ceux des coefficients saisonniers. La différence vient du fait que l'on fait un ajustement chaque fois qu'un certain événement se produit plutôt que de l'effectuer à partir d'un calendrier.

Les modèles d'actions spéciales étendent la famille de Holt-Winters des lissages exponentiels qui incluent trois options de tendance et trois options de saisonnalité, soit neuf modèles en tout. Les schémas suivants illustrent le profil de ces neuf modèles.

Forecast Profiles of Exponential Smoothing Models (Gardner 1985)

Les prévisions sont créées en extrapolant le niveau, la tendance et la saisonnalité estimés à l'extrémité des données. Elles décrivent les structures sous-jacentes si ces structures existent à l'extrémité des données. Elles n'incluent pas, et ne peuvent inclure, les effets aléatoires et le bruit, de sorte qu'elles sont plus lissées que les valeurs futures ne le seront effectivement.

Le lissage exponentiel travaille comme son nom l'indique. Il extrait le niveau, la tendance et la saisonnalité en calculant des estimations lissées de ces caractéristiques, en donnant un poids plus important aux données les plus récentes. Il s'adapte aux structures changeantes mais minimise les effets des points aberrants et du bruit.

Le degré de lissage dépend des paramètres calculés à partir des données. le niveau, la tendance, la saisonnalité et les actions spéciales nécessitent chacune un paramètre. Si la tendance est amortie, la constante d'amortissement doit être également calculée. Le nombre total de paramètres à estimer dépend des composants du modèle.

Le lissage exponentiel dans Forecast Pro

Ce chapitre présente de façon détaillée l'implémentation du lissage exponentiel dans Forecast Pro.

Choix du modèle La sélection automatique du modèle se fait parmi les trois modèles usuels : simple, Holt et Winters. Si les données sont positives, Forecast Pro essaie le modèle multiplicatif, sinon il essaie le modèle additif. Le programme choisit le modèle qui minimise le BIC. La recherche a montré que ceci conduit au modèle donnant les meilleurs prévisions (Koehler et Murphree-1986).

Optimisation des paramètres Pour estimer les paramètres du modèle, le programme utilise une recherche itérative (méthode du simplex) qui minimise la somme des carrés des écarts. La recherche démarre à partir de valeurs initiales qui sont soit données par le programme, soit entrées par l'utilisateur. Il continue jusqu'à la recherche d'un minimum local. S'il existe plus d'un minimum local, alors le résultat peut dépendre du point initial.

Intervalle de confiance Forecast Pro définit une limite haute et basse pour les prévisions du modèle de lissage. Ces limites sont calculées en faisant l'hypothèse que le modèle probabiliste sous-jacent est le modèle de Box-Jenkins (Box-Jenkins-1986) pour lequel le lissage exponentiel est optimal. Forecast Pro calcule le modèle équivalent de Box-Jenkins au modèle de lissage pour générer les limites de confiance.

Cet intervalle de confiance est utile pour apprécier la qualité du modèle, mais il faut bien se souvenir que le modèle probabiliste sous-jacent n'est pas connu.

Description statistique du lissage exponentiel

Chacune des techniques de lissage utilise des équivalences récursives pour obtenir les valeurs des paramètres du modèle. Le lissage simple nécessite une équation (niveau), Holt deux équations (niveau et tendance), Winters en nécessite trois (niveau, tendance et saisonnalité). Les modèles avec actions spéciales nécessitent une équation complémentaire. Chaque équation est contrôlée par un paramètre de lissage. Quand ce paramètre est élevé (proche de 1), l'équation donne un poids élevé aux observations les plus récentes, le processus est qualifié de hautement adaptatif. Quand ce paramètre est faible (proche de zéro), l'équation donne un poids important aux observations éloignées et le processus est peu adaptatif.

On trouve ci-après les notations qui seront utilisées pour la présentation des différents modèles de lissage exponentiel. Elles sont adaptées de Gardner (1985).

m horizon de la prévision

p nombre de périodes par an

Y_t valeur observée au temps t

S_t	niveau lissé au temps t
T_t	tendance lissée au temps t
I_t	index saisonnier lissé au temps t
J_t	coefficient d'action spéciale au temps t
α	paramètre de lissage du niveau de la série
γ	paramètre de lissage de la tendance
δ	paramètre de l'action spéciale
λ	paramètre de lissage de la saisonnalité
φ	constante d'amortissement
$\hat{Y}_t(m)$	prévision au temps $t + m$ faite à partir du temps t
$\tilde{I}_{t+m}$	index de saisonnalité au temps $t + m$
$\tilde{J}_{t+m}$	index d'action spéciale au temps t + m

Dans Forecast Pro :

α est le paramètre de niveau ("level parameter")
γ est le paramètre de tendance ("trend parameter")
δ est le paramètre de saisonnalité ("seasonal parameter")
λ est le paramètre d'action spéciale ("event parameter")
φ est la constante d'amortissement ("damping constance")

Modèle général additif

Il existe 27 modèles de lissage exponentiel, il serait peu pratique et certainement fastidieux de les décrire tous en détail. Nous allons discuter le modèle le plus complet et indiquer comment les autres s'en déduisent.

Le modèle additif le plus complexe met en jeu le niveau S_t, la tendance T_t, le coefficient saisonnier I_t et le coefficient d'action spéciale J_t. On suppose que la tendance décroît à la vitesse $\varphi \leq 1$. On suppose que les observations Y_t se décomposent de la façon suivante.

$$Y_t = S_t + I_t + J_t + e_t$$

Les composants S_t, I_t, J_t dans cette équation sont les vraies valeurs du niveau, et des coefficients saisonniers et d'actions spéciales au temps t. Mais on ne peut pas les observer directement mais on doit les estimer à partir des données. Ceci est fait par les équations récursives suivantes, qui sous-tendent un filtre de Kalman approché pour modèle sous-jacent. Les valeurs en italique se rapportent aux estimations des vraies valeurs.

$$S_t = \alpha\,(Y_t - \bar{I}_t - \bar{J}_t) + (1 - \alpha)\,(S_{t-1} + \varphi T_{t-1})$$

$$T_t = \gamma\,(S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma)\varphi T_{t-1}$$

$$I_t = \delta\,(Y_t - S_t - \bar{J}_t) + (1 - \delta)\bar{I}_t$$

$$J_t = \lambda\,(Y_t - S_t - \bar{I}_t) + (1 - \lambda)\bar{J}_t$$

Le symbole $\bar{I}_t$ se rapporte à l'évaluation la plus récente du coefficient saisonnier au temps t. Si t se rapporte à décembre 93, alors cette estimation a été recalculée en décembre 92. Le symbole $\bar{J}_t$ se rapporte à la dernière estimation mise à jour de l'action spéciale qui s'est produite au temps t. ces équations mettent à jour les estimations antérieures S_{t-1}, T_{t-1}, $\bar{I}_t$ et $\bar{J}_t$ pour tenir compte de la dernière observation. Les dernières estimations sont les valeurs à gauche des équation : S_t, T_t, I_t et J_t.

Tous les modèles additifs plus simples sont, d'une certaine façon, contenus dans les équations précédentes.

S'il n'y a pas d'action spéciale au temps t, ou si les coefficients d'actions spéciales ne sont pas désirés, alors $J_t = \bar{J}_t = 0$ et la dernière équation disparaît.

Ces équations mettent en jeu une tendance amortie. Dans ce cas la constante d'amortissement φ a, en général, une valeur légèrement inférieure à 1. Pour convertir le modèle en modèle à tendance linéaire, il suffit de prendre $\varphi = 1.0$. cela revient à l'ôter des équations.

Si on ne veut pas de coefficients saisonniers, il suffit d'éliminer la troisième équation et de prendre $S_t = 0$ partout ailleurs.

S'il n'y a pas de tendance, éliminez la seconde équation et prenez $T_t = 0$ partout ailleurs.

Ces équations montrent clairement le fonctionnement du lissage exponentiel. Examinons en détail la première. La valeur $Y_t - \bar{I}_t - \bar{J}_t$ représente l'observation courante corrigée des variations saisonnières et actions spéciales, cette correction est faite en soustrayant leur dernière estimation. L'ajustement fournit une estimation du niveau actuel. La valeur $S_{t-1} + \varphi T_{t-1}$ représente la prévision faite au niveau actuel S_t basé sur l'information disponible à l'observation précédente. Le premier terme, basé sur l'observation courante est pondéré par α et le second, basé sur l'information passée, est pondéré par $(1 - \alpha)$.

Chaque estimation lissée du niveau est calculée comme la moyenne pondérée de l'observation courante et des données passées. Les pondérations décroissent selon une forme exponentielle. Le taux de décroissance dépend de la valeur du coefficient α qui contrôle la sensibilité relative aux nouvelles données et aux anciennes. Plus la valeur est grande, plus on favorise les valeurs récentes au détriment des anciennes.

Les paramètres γ, φ, δ et λ sont calculés à partir des observations comme étant les valeurs qui minimisent la somme des carrés des erreurs de prévision pour l'ensemble de l'historique. Pour calculer la somme des carrés des erreurs à partir de valeurs initiales de γ, φ, δ et λ, les étapes suivantes sont réalisées

> Les valeurs initiales des quatre composantes S_0, T_0, I_0 et J_0 sont fixées à des valeurs cohérentes basées sur les données historiques.
>
> La prévision à un horizon de 1 pour le premier point t = 1 est générée à partir de l'équation $\hat{Y}_0(1) = S_0 + \varphi T_0 + \tilde{I}_1 + \tilde{J}_1$. L'erreur de prévision $Y_1 - \hat{Y}_1(1)$ est calculée et élevée au carré.
>
> Cette étape est répétée pour t = 2 et jusqu'à la fin de l'historique pour t = T. La formule de prévision est $\hat{Y}_t(1) = S_t + \varphi T_t + \tilde{I}_{t+1} + \tilde{J}_{t+1}$ d'où l'erreur $Y_t - S_t - \varphi T_t - \tilde{I}_{t+1} - \tilde{J}_{t+1}$. A chaque point on calcule le carré de l'erreur et on en fait la somme.

Cette procédure est renouvelée avec de nouvelles valeurs des paramètres jusqu'à ce que les valeurs qui minimisent la somme des carrés des erreurs soient trouvées. Les valeurs d'essai sont déterminées par la méthode du simplex, un algorithme particulièrement stable en optimisation non linéaire.

Après calcul des paramètres, le modèle est utilisé pour calculer les prévisions. L'équation donnant le prévision à l'horizon m Y_{T+m} à partir de la prévision au temps t Y_T (dernier point de l'historique) est :

$$\hat{Y}_T(\mathrm{m}) = S_T + \left[\sum_{i=1}^{m} \varphi^i\right] T_T + \tilde{I}_{T+m} + \tilde{J}_{T+m}$$

Modèle général multiplicatif

Le modèle multiplicatif général se présente pratiquement de la même façon que le modèle additif, avec la multiplication et la division remplaçant l'addition et la soustraction. Les équations multiplicatives sont les suivantes.

$$S_t = \alpha \frac{Y_t}{\tilde{I}_t \tilde{J}_t} + (1 - \alpha)\,(S_{t-1} + \varphi T_{t-1})$$

$$T_t = \gamma\,(S_t - S_{t-1}) + (1 - \gamma)\varphi T_{t-1}$$

$$I_t = \delta \frac{Y_t}{S_t \tilde{J}_t} + (1 - \delta)\tilde{I}_t$$

$$J_t = \lambda\,(Y_t - S_t - \tilde{I}_t) + (1 - \lambda)\tilde{J}_t$$

Les modèles plus simples sont obtenus à partir de ces équations d'une façon analogue au modèle additif.

> S'il n'y a pas d'action spéciale au temps t, ou si l'on ne veut pas introduire d'action spéciale, alors $J_t = \tilde{J}_t = 1.0$ et l'on supprime la dernière équation.
>
> Ces équations mettent en jeu une tendance amortie. Dans ce cas la constante d'amortissement vaut en général une valeur légèrement inférieure à 1.0. Pour passer à un modèle à tendance linéaire, prendre $\varphi = 1.0$ ou simplement ôter toute référence à φ dans les équations.
>
> Si l'on ne veut pas de coefficients saisonniers, éliminer la troisième équation et prendre $S_t = 1.0$ partout ailleurs.
>
> Si l'on ne veut pas de tendance, ôter la seconde équation et prendre $T_t = 0$ partout ailleurs.

Maintenant que nous avons analysé les modèles complets additifs ou multiplicatifs, nous allons examiner quelques modèles plus simples comme cas particuliers.

Lissage exponentiel simple

Le modèle de lissage exponentiel simple est utilisé pour des données qui ne possèdent pas de tendance, pas de saisonnalité et ne sont pas influencées par des promotions. L'équation s'obtient soit à partir du modèle général additif, soit à partir du modèle général multiplicatif en éliminant les trois dernières équations et les coefficients de saisonnalité et d'actions spéciales de la première. L'équation de base s'écrit :

$$S_t = \alpha Y_t + (1\text{-}\alpha)\ S_{t-1} \tag{1}$$

ou sous forme développée

$$S_t = \alpha Y_t + \alpha\ (1\text{-}\alpha) Y_t - 1 + \alpha\ (1\text{-}\alpha)^2 Y_t - 2(2)$$

L'équation (1) montre bien le fonctionnement du lissage exponentiel. Chaque valeur lissée du niveau est calculée comme une valeur pondérée entre une valeur courante et les données passées. Les poids décroissent selon un schéma exponentiel. Le taux de décroissance dépend de la valeur du paramètre de lissage (α) qui contrôle la sensibilité relative entre les nouvelles et les anciennes valeurs. Plus le paramètre de lissage est élevé, plus les valeurs récentes sont favorisées vis-à-vis des plus anciennes.

Remarquons que lorsque :

$$\alpha = 1.0$$

l'équation devient :

$$S_t = Y_t$$

Il n'y a aucune mémoire des valeurs passées. La prévision dans ce cas est tout simplement la dernière valeur. A l'inverse, si le paramètre est très petit, alors un grand nombre de points reçoivent des poids presque identiques : la mémoire du processus est "longue". Les autres modèles de lissage exponentiel utilisent des paramètres de lissage additifs pour les valeurs lissées de la tendance et de la saisonnalité aussi bien que pour le niveau. Plus le modèle est adaptatif eu égard à cette composante particulière de la série.

L'équation (2) montre comment la valeur lissée de la série est mise à jour quand apparaît une nouvelle observation. La prévision à un horizon de m intervalles faite à partir du temps t donnée par :

$$\hat{Y}(m) = S_t \tag{3}$$

La valeur courante lissée est étendue de façon infinie. A l'évidence, le lissage exponentiel simple n'est pas approprié aux données qui présentent une tendance.

Le lissage exponentiel de Holt

Le modèle de Holt (1957) utilise des valeurs lissées du niveau et de la tendance pour effectuer des prévisions. L'équation de prévision est :

$$\hat{Y}(m) = S_t + mT_t \qquad (4)$$

La valeur lissée du niveau est ajoutée à la valeur lissée de la tendance multipliée par les nouveaux intervalles.

Les équations de lissage sont :

$$S_t = \alpha Y_t + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \qquad (5)$$

$$T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1} \qquad (6)$$

L'équation (5) montre comment la valeur actualisée du niveau lissé est calculée comme pondération des nouvelles données (premier terme) et la meilleure estimation du nouveau niveau basé sur les anciennes données (second terme). D'une façon tout à fait analogue, l'équation (6) annule les anciennes et nouvelles estimations du niveau lissé, définissant aussi la tendance linéaire courante (locale).

Le modèle de Winters multiplicatif

Dans le modèle de Winters, on fait l'hypothèse que chaque observation est le produit d'une valeur désaisonnalisée et d'un index saisonnier pour ce mois (ou cette période) particulier. Les valeurs désaisonnalisées sont décrites par un modèle de Holt. Le modèle de Winters met alors en jeu trois paramètres : niveau, tendance et saisonnalité dans trois équations de définition. L'équation de prévision pour le modèle de Winters multiplicatif s'écrit :

$$\hat{Y}(m) = (S_t + mT_t)\hat{I}_t(m) \qquad (7)$$

où l'on voit que la prévision commence par se calculer selon la méthode de Holt, puis que l'on multiplie le résultat par la valeur de l'index saisonnier pour la période courante.

Les équations de lissage s'écrivent sont obtenues à partir du modèle multiplicatif général en fixant φ à 1 et en l'ôtant partout où il apparaît :

$$S_t = \alpha \frac{Y_t}{I_{t-p}} + (1-\alpha)(S_{t-1} - T_{t-1}) \qquad (8)$$

$$T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1} \tag{9}$$

$$I_t = \delta\frac{Y_t}{S_t} + (1-\delta)I_{t-p} \tag{10}$$

L'équation de lissage du niveau (8) est semblable à l'équation (5) du modèle de Holt. La différence vient du fait que la dernière observation est désaisonnalisée en divisant par la valeur de l'index calculé un 24 (ou une période) auparavant. L'équation de lissage de la tendance des deux modèles sont identiques. L'index de saisonnalité est estimé comme la pondération entre le rapport de la valeur de l'observation courante au niveau lissé et la valeur précédente de l'index pour la même période.

Le modèle de Winters additif

Dans le modèle de Winters additif on fait l'hypothèse que chaque observation est la somme d'une valeur désaisonnalisée et d'un index saisonnier. Les valeurs désaisonnalisées sont décrites par le modèle de Holt. Les équations du modèle de Holt additifs sont très voisins du modèle multiplicatif, à l'exception de la désaisonnalisation qui se traduit par une soustraction au lieu d'une division.

L'équation de prévision par le modèle de Winters additif s'écrit :

$$\hat{Y}(m) = S_t + mT_t + \hat{I}_t(m)\,. \tag{11}$$

Les équations de lissage s'écrivent sont obtenues à partir du modèle additif général en fixant φ à 1 et en l'ôtant partout où il apparaît :

$$S_t = \alpha(Y_t - I_{t-p}) + (1-\alpha)(S_{t-1} + T_{t-1}) \tag{12}$$

$$T_t = \gamma(S_t - S_{t-1}) + (1-\gamma)T_{t-1} \tag{13}$$

$$I_t = \delta(Y_t + S_t) + (1-\delta)I_{t-p} \tag{14}$$